שאלה 1: (שאלת שיעורי בית)

א. (15%) מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^3 + 27i = 0$ (בשדה $\mathbb{C}$).
הצג את הפתרונות במישור המרוכב.

פתרון: נכתוב את המשוואה בצורה:

$$z^3 = -27i = 27(-i) = 27\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 27\,\mathrm{cis}(270^\circ)$$

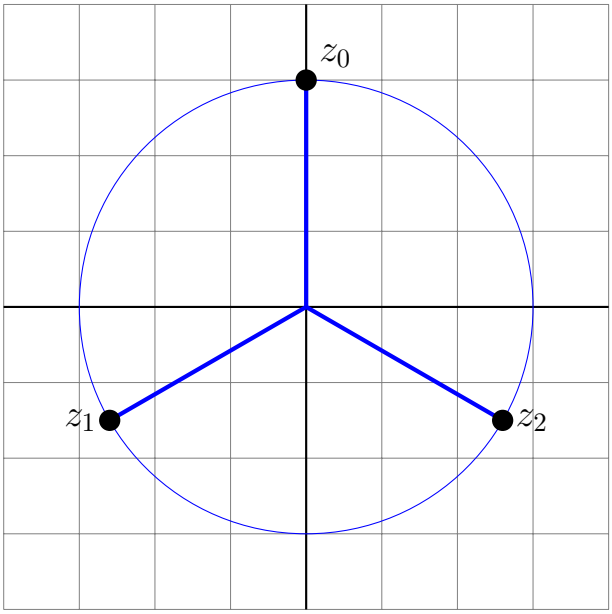
הארגומנט של $-27i$ הוא $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

$|z| = \sqrt[3]{27} = 3$. לכן $z = 3\,\mathrm{cis}\,\phi$ כאשר $3\phi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

לפי הנוסחא:

$$\begin{aligned}
w_k &= \sqrt[3]{27}\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi/2}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right) = 3\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}\right) \\
w_0 &= 3\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{0\pi}{3}\right) = 3\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\,\mathrm{cis}\,(90^\circ) \\
w_1 &= 3\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) = 3\,\mathrm{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 3\,\mathrm{cis}\,(210^\circ) \\
w_2 &= 3\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right) = 3\,\mathrm{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 3\,\mathrm{cis}\,(330^\circ)
\end{aligned}$$

נייצג את הפתרונות במישור המרוכב:



ב. (10%) האם לכל צמד $z, w \in \mathbb{C}$, כאשר $z \neq 0$, $w \neq 0$,
הביטוי $z \cdot w - \overline{z} \cdot \overline{w}$ הוא מדומה טהור?

פתרון 1: לפי תכונות מוכרות של הצמוד מתקיים:

$$z \cdot w - \overline{z} \cdot \overline{w} = z \cdot w - \overline{z \cdot w} = 2\,\mathrm{Im}(z \cdot w)i$$

והביטוי המתקבל הוא מדומה טהור, שהרי $\mathrm{Im}(z \cdot w)$ הוא מספר ממשי.

פתרון 2: נסמן $z \cdot w = a + bi$. לפי תכונות מוכרות של הצמוד מתקיים:

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w} = a - bi$$

ולכן

$$z \cdot w - \overline{z} \cdot \overline{w} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$$

והביטוי המתקבל הוא מדומה טהור, שהרי b ממשי.

פתרון 3: נסמן $z = a + bi$, $w = c + di$.

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (ac - bd) + (ad + bc)i \\ \overline{z} \cdot \overline{w} &= (a - bi) \cdot (c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i \\ z \cdot w - \overline{z} \cdot \overline{w} &= 2(ad + bc)i \end{aligned}$$

והביטוי המתקבל הוא מדומה טהור, שהרי a, b, c, d ממשיים.

הערה: המספר $0 = 0 + 0i$ הוא בו זמנית מספר מדומה טהור ומספר ממשי. כמובן ש־ 0 הוא המספר היחיד שגם ממשי וגם מדומה טהור.

שאלה 2:

נתונה מערכת משוואות לינארית עם פרמטר ממשי a.

$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 2 \\ (2a+1)x + (a+2)y + z = 7 \end{cases}$$

פתרון: נתחיל מיד בניתוח המערכת הפרמטרית על ידי דירוג (חלקי) של המטריצה המורחבת של המערכת הנתונה.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 0 & 2 \\ (2a+1) & (a+2) & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\Big\Downarrow \quad \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - (2a+1)R_2 \\ R_1 \to R_1 - aR_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1-a^2 & 0 & 2-2a \\ 1 & a & 0 & 2 \\ 0 & 2-2a^2 & 1 & 5-4a \end{array}\right)$$

$$\Big\Downarrow \quad \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_1 \leftrightarrow R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 2 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 2-2a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

הפעולות שעשינו מותרות לכל ערך אפשרי של a (לא הכפלנו שורה מסוימת בביטוי שיכולה להיות אפס, אך אולי חיברנו אפס פעמים שורה לשורה **אחרת**.)

הערה על טעות אפשרית: הפעולה $R_2 \to \left(\frac{1}{1-a^2}\right) R_2$ חוקית **רק אם נניח** $1-a^2 \neq 0$. ביצוע פעולה זו **ללא טיפול נפרד** במקרים המיוחדים $a = \pm 1$ **אינה חוקית**. הטעות עלולה לגרום לכך שלא נבחין בסתירה הקיימת במערכת במקרה $a = -1$, ובקיום דרגת חופש במקרה $a = 1$.

ננתח את הצורה שקיבלנו

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 2 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 2-2a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

לפי מקרים, בהתאם לערכים של a שיאפסו את האיברים שנראים כמובילים (בצורה הפרמטרית):

- במידה ו־ $1-a^2 \neq 0$ הצורה מדורגת, ומתקיים $\operatorname{rank}(A|b) = \operatorname{rank}(A) = 3 = n$ (n הוא מספר המשתנים) ולכן יש פתרון יחיד.
- במקרה $a=-1$ השורה השניה היא $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$ כלומר יש סתירה במערכת, ואין למערכת פתרון.
- במקרה $a=1$ השורה השניה מתאפסת, והצורה המדורגת (לאחר החלפת שתי השורות האחרונות) היא: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ומתקיים $\operatorname{rank}(A|b) = \operatorname{rank}(A) = 2 < n$ (n הוא מספר המשתנים) ולכן יש למערכת אינסוף פתרונות.

א. (5%) לאילו ערכים של הפרמטר a אין למערכת פתרון?

<u>תשובה:</u> רק ל־ $a=-1$ שבו מתקבל סתירה במערכת.

ב. (5%) לאילו ערכים של הפרמטר a יש למערכת פתרון יחיד?

<u>תשובה:</u> לכל $a \notin \{-1,1\}$ יש למערכת פתרון יחיד.

ג. (4%) מצא את הפתרון היחיד למקרים אלו. (ייתכן תלות ב־ a.)

<u>תשובה:</u> במקרים אלו, ניתן לחלק את המשוואה השניה ב־ $(1-a)$ ולקבל משוואה: $(1+a)y = 2$ ולכן הפתרון היחיד במקרים אלו הוא:

$$(x,y,z) = \left(\frac{2}{1+a}, \frac{2}{1+a}, 1\right)$$

ד. (5%) לאילו ערכים של הפרמטר a יש למערכת אינסוף פתרונות?

תשובה: רק ל־ $a = 1$ שבו אין סתירה במערכת ומספר דרגות החופש גדול ממש מ־ 0. (במקרה שלנו מספר דרגות החופש הוא 1.)

ה. (4%) מצא את הפתרון הכללי למקרים אלו. (ייתכן תלות ב־ a.)

תשובה: מהצורה המדורגת מקבלים ש־ $z = 1$ ו־ $x + y = 2$. לפי השיטה המקובלת נקבל פתרון כללי:

$$(x, y, z) = (2 - \alpha, \alpha, 1) = (2, 0, 1) + \alpha(-1, 1, 0), \qquad \alpha \in F$$

כאשר בחרנו את α כפרמטר למשתנה החופשי y.

(יש אינסוף תשובות נכונות, כולן מתארות את אותו הישר.)

ו. (2%) תאר את הפתרון הכללי למערכת ההומוגנית המקבילה, עבור המקרה שיש אינסוף פתרונות.

פתרון: על ידי חיסור של פתרון פרטי למערכת האי־הומוגנית מהפתרון הכללי שלה, נקבל פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(x, y, z) = (-\alpha, \alpha, 0) = \alpha(-1, 1, 0), \qquad \alpha \in F$$

הערה: למקרה $a = -1$ כבר אין סתירה, וגם במקרה זה יש אינסוף פתרונות למערכת ההומוגנית. פתרון כללי הוא

$$(x, y, z) = (\alpha, \alpha, 0) = \alpha(1, 1, 0), \qquad \alpha \in F$$

כי במקרה $a = -1$ המשוואה הראשונה (ההומוגנית) היא $x - y = 0$.

שאלה 3:

נתבונן במרחב הוקטורי הממשי (כלומר, מעל השדה $\mathbb{R}$) $V = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$, כאשר

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^3.$$

א. (10%) האם $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \in V$?

פתרון: כדי להחליט יש לפתור את המשוואה $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = u$. נכתוב באופן מפורש את המערכת ונדרג:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 6 \\ -5 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow \quad \begin{array}{lcl} R_1 & \to & R_1 + R_3 \\ R_1 & \to & (-1) \cdot R_1 \\ R_2 & \to & R_2 + 2R_1 \\ R_3 & \to & R_3 + 5R_1 \\ R_2 & \leftrightarrow & R_3 \\ R_2 & \to & (-1) \cdot R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש לבצע את הפעולות האלו בסדר שהן רשומות, לפי השורות שקיימות לאחר הפעולות הקודמות. לצורך חסכון, לא פרטנו כאן את שלבי הביניים, על אף שהפירוט הוא הכרחי לקבלת ניקוד מלא.

(ניתן לדרג באופנים נוספים.)

מכאן אפשר לחלץ פתרון כללי למערכת. מספיק לנו פתרון אחד כגון $(\alpha, \beta, \gamma) = (-3, 12, 0)$. מכיון שיש פתרון למערכת הוקטור הנתון u שייך למרחב הנפרש של v_1, v_2, v_3.

כמובן, כל פתרון למערכת מתאים להוכיח את הנדרש.

עקרונית, ניתן גם לשים לב שיש פתרון, ולהסיק את המסקנה.

לצורך נימוק לתשובה, אפשר לספק ערכים מתאימים של α, β, γ ולבדוק. אבל, במידה והתשובה היתה לא, היה צורך להוכיח שאין ערכים מתאימים.

ב. (10%) מצא צירוף לינארי לא טרוויאלי של v_1, v_2, v_3 שנותן את וקטור האפס. כלומר, מצא $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, לא כולם אפס, כך שהצירוף הלינארי של v_1, v_2, v_3 עם מקדמים α, β, γ הוא אפס:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \vec{0}$$

<u>פתרון</u>: הפעם יש לפתור את המשוואה $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \vec{0}$ ולחפש פתרון **לא טרויאלי**. הדירוג של המערכת ההומוגנית דומה, מלבד שהעמודה של האיברים החופשיים נשאר כולו אפס תמיד.

ניתן לחלץ פתרון כללי למערכת ההומוגנית.

מספיק לנו פתרון אחד כגון $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -11, 1)$. (כל פתרון אחר הוא כפולה של פתרון זה. כל כפולה בסקלר שונה מאפס נותנת תשובה לשאלה.)

ג. (5%) יהא W אוסף הפתרונות של המערכת ההומוגנית $4x + y + 3z = 0$ מעל $\mathbb{R}$.

כידוע, W היא תת־מרחב של $\mathbb{R}^3$.

מצא איבר לא טרוויאלי (לא אפס) בחיתוך $V \cap W$. (יש לתת וקטור של מספרים בתשובה.)

<u>פתרון</u>: יש להציב איבר כללי של V במשוואה שמגדירה את W.

כאשר נציב את $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$, כלומר נציב:

$$\begin{aligned} x &= 4\alpha + \beta + 3\gamma \\ y &= -2\alpha + 4\gamma \\ z &= -5\alpha - \beta - \gamma \end{aligned}$$

נקבל את המשוואה:

$$\begin{aligned} 0 &= 4x + y + 3z = 4(4\alpha + \beta + 3\gamma) + (-2\alpha + 4\gamma) + 3(-5\alpha - \beta - \gamma) \\ &= -\alpha + \beta + 13\gamma \end{aligned}$$

כל פתרון לא טרויאלי ייתן וקטור שונה מאפס בחיתוך. למשל $\alpha = \beta = 1, \gamma = 0$ נותן את הוקטור $(x, y, z) = (5, -2, -6)$.

הערה: בעזרת סעיף ב' ניתן להסיק שהקבוצה $\{v_1, v_2, v_3\}$ תלויה לינארית, ושגם לקבוצה $\{v_1, v_2\}$ אותה מרחב נפרש. מכאן קל לראות כי כל וקטור בחיתוך הוא כפולה של $(5, -2, -6)$.

ד. (בונוס 2%) תאר את המבנה הגיאומטרי של V, W, ו־ $V \cap W$ כתתי־מרחב של $\mathbb{R}^3$, המרחב הממשי התלת־ממדי.

פתרון: על פי ההערה האחרונה המבנה הגיאומטרי של $V \cap W$ היא ישר דרך הנקודה $(5, -2, -6)$ והראשית במרחב $\mathbb{R}^3$.

בעזרת סעיף ב' ניתן להסיק ש־ V נפרש בעזרת כל שתים מתוך שלושת הוקטורים v_1, v_2, v_3 אך לא על ידי אחד מהם. לכן V הוא המישור דרך הראשית שמכיל את הוקטורים v_1, v_2, v_3.

לגבי W מדובר במערכת הומוגנית בעל משוואה יחידה (ולא טרויאלית) ולכן מימד מרחב הפתרונות (מספר המשתנים החופשיים) הוא 2, כלומר מדובר במישור דרך הראשית. (ניתן לתאר בפירוש איזה מישור בעזרת פתרון כללי של המערכת.)

כמובן, הישר $\{c(5, -2, -6)\}$ היא הישר המשותף לשני המישורים האלו.

שאלה 4:

תהיינה A, B מטריצות ממשיות ריבועיות מסדר $n \times n$, כאשר A **אנטי־סימטרית** (כלומר, $A^t = -A$) ו־ B כלשהי.

⋆ **אין קשר בין הסעיפים!** בפרט, אין להשתמש בנתון נוסף מסעיף מסיום בסעיף אחר.

א. (8%) הוכח כי אם B סימטרית (כלומר, $B^t = B$) ומתקיים $AB = BA$ אזי המטריצה $C = A^2B$ היא סימטרית.

פתרון: נוכיח (על בסיס הנתון) ש־ $C^t = C$:

$$\begin{aligned} C^t &= (A^2B)^t = B^t(A^2)^t = B^tA^tA^t = B(-A)(-A) = (-1)^2BAA \\ &= (BA)A = (AB)A = A(BA) = A(AB) = A^2B = C \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בנתונים, בתכונת הקיבוץ של כפל מטריצות, וכן בכלל לגבי המטריצה המשוחלפת של מכפילה.

ב. (9%) נתון ש־ $n = 3$ ושמתקיים $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

הוכח כי סכום האברים **בעמודה השלישית** של A הוא 2.

פתרון: על פי הגדרת כפל מטריצות האיבר השלישי בוקטור התוצאה היא סכום אברי השורה השלישית של A, סכום שיוצא (על פי הנתון) -2. לפי האנטי־סימטריות של A האברים שבעמודה השלישית של A הן הנגדיים של הערכים בשורה השלישית של A, ולכן הסכום שלהם הוא $-(-2) = 2$.

הערה: ניתן להיעזר בצורה הכללית של מטריצה אנטי־סימטרית מסדר 3 וחישוב זהיר כדי לקבל את אותה ההוכחה בצורה "טכנית" יותר. אבל, מבלי שימוש באנטי־סימטריות, התוצאה לא נכונה ואין הוכחה.

ג. (8%) נתון ש־ $n = 3$ ושמתקיים $a_{12} \neq 0, a_{13} \neq 0$.

הוכח כי $\text{rank}(A) = 2$.

פתרון: יש לדרג את הצורה הכללית:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

מכיון שנתון ש־ $a_{12} \neq 0, a_{13} \neq 0$ ניתן לחלק את שורה 2 ב־ $-a_{12}$ ואת שורה 3 ב־ $-a_{13}$.

לאחר מכן, אפשר להחסיר את השורה השניה מהשורה השלישית. נקבל:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 0 & \frac{-a_{23}}{a_{12}} \\ 0 & \frac{a_{23}}{a_{13}} & \frac{a_{23}}{a_{12}} \end{pmatrix}$$

כעת ניתן להחסיר $\frac{a_{23}}{a_{12}a_{13}}$ כפול השורה הראשונה מהשורה השלישית על מנת לאפס את השורה השלישית. פעולה זו מותרת שהרי שתי הגורמים במכנה שונים מאפס.

לכן ברור שהדרגה היא 2, אך כדי לקבל צורה מדורגת עלינו להחליף את שתי השורות הראשונות.

ד. (בונוס 1%) הוכח כי אברי האלכסון של A^3 הם כולם אפסים.

פתרון: כל חזקה אי־זוגית של מטריצה אנטי־סימטרית היא גם אנטי־סימטרית. אברי האלכסון במטריצה אנטי־סימטרית הם תמיד כולם אפס.

ה. (בונוס 2% **שאלה קשה**)
הוכח שאם A היא מטריצה אנטי־סימטרית מסדר n השונה מ־ 0, אז $\text{rank}(A) \geq 2$.

פתרון: יהי a_{ij} איבר שונה מאפס שמאלי ביותר. (אולי יש עוד אברים שונים מאפס באותה העמודה.) יש איבר כזה, אחרת A היתה מטריצת האפס, בניגוד לנתון. כמובן, בגלל האנטי־סימטריות $i > j$.

מכיון ש־ A אנטי־סימטרית $a_{ji} = -a_{ij}$, אך $a_{ii} = a_{jj} = 0$, ולכן שורות i ו־ j של A הן בת"ל. לכן, הדרגה של A היא לפחות 2.

ניתן לבטא את סוף ההוכחה מבלי אי־תלות כך: לכן, ניתן להעביר את שורה i לשורה הראשונה. בעזרת שורה זה לבד אי אפשר לאפס את שורה j, ולכן, בצורה המדורגת של A יהיו לפחות שתי שורות השונות מאפס.